INNEHÅLL

GRUNDLÄGGANDE RÄKNING

Matematik är i grund och botten ett verktyg. Ett verktyg som ska göra det lättare för oss att förstå vår omvärld. Med hjälp av matematik kan man t.ex. skapa prognoser för hur framtiden ska se ut. Det kan gälla morgondagens väder eller utvecklingen för en aktie. I skogen vill vi bland annat göra olika prognoser för hur träden kommer att växa med olika skötselmetoder, beräkna värdet av ett bestånd och kunna bedöma hur många kubikmeter skog som kommer att falla ut vid en avverkning.

Innan man till fullo behärskar ett verktyg måste man ha grundläggande utbildning och mycket träning. Det är det som den här kursen ska försöka ge; träning i att använda redskapet matematik. Du har nog arbetat med det mesta som tas upp i den här kursen förut, men det skadar inte att fräscha upp kunskaperna. Ju mer du räknar desto effektivare kommer du att lära dig använda matematikens verktyg.

I detta avsnitt ska vi främst titta på hur man använder formler i matematiken – något som man ofta har god nytta av i skogsbruket.

MATEMATIKEN SOM UPPFINNING

Har du någon gång funderat över hur de tal vi skriver är uppbyggda? Själva idéen är genial. Med hjälp av endast elva tecken (decimalkomma, och siffrorna 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) kan såväl väldigt stora som extremt små tal skrivas. Det smarta är att det inte bara är siffran i sig som har betydelse, utan även dess position i talet; dvs. var i talet siffran står. Ta t.ex. talet:

123,456

Eftersom 1:an står som tredje tecken till vänster om decimalkommat vet vi att den inte innebär 1 utan 100. På samma sätt betyder 2:an 20 osv. Vi skulle kunna skriva hela talet som:

$$100 + 20 + 3 + 0{,}4 + 0{,}05 + 0{,}006 = 123{,}456$$

Genom att jämföra detta med den romerska kulturen som använde en ny symbol för varje ny storleksordning på talen kan man ana fördelarna. Romarna hade *ett* tecken för 1: I, ett annat för 10: X, ett tredje för 100: C, ett fjärde för 1000: M osv. För att kunna skriva astronomiskt stora tal krävdes alltså en stor uppsättning tecken, medan vi klarar oss med våra elva i alla lägen.

TABELL 1.1. Exempel på några tal skrivna i de olika systemen.

Positionssystemet	Romerskt
7	VII
9	IX
26	XXVI
90	XC
1990	MDCDXC

Positionssystemet är en matematisk uppfinning som vi använder dagligen. Uppfinningen är av den typen som är karakteristisk för matematiken; den består inte av något material, man behöver inga traditionella verktyg för att skapa den och inte en enda av datateknikens integrerade kretsar för att den ska fungera.

MATEMATISKA MODELLER

I skogsbruket används ett stort antal olika matematiska modeller vilka brukar kunna sammanfattas med olika formler. En del av dessa formler kommer vi att ta upp i den här kursen. Man ska vara medveten om att dessa formler i praktiken inte ger ett exakt facit, utan bara ett ungefärligt värde som ska kunna användas som stöd för olika typer av beslut.

Om vi t.ex. ska räkna ut vilken volym ett visst träd har så brukar man oftast klava trädet i brösthöjd (1,3 meter ovan mark) för att få dess diameter och sedan också mäta dess höjd. De två siffrorna stoppas därefter in i en matematisk formel – eller matematisk modell – för att ge en uppskattning av trädets volym. Det finns dock inget som säger att den siffra som vi får fram är trädets exakta volym. Man kan ju mycket väl tänka sig att två olika träd som har samma diameter och höjd ändå har helt *olika* volym. Detta eftersom trädens form kan variera. En trädstam som avsmalnar fort kommer ju inte alls att ha lika stor volym som en stam som har ungefär samma diameter högt upp på stammen som i brösthöjd.

Den matematiska modellen (/formeln) är alltså en *förenklad* beskrivning av verkligheten. Om vi fällde trädet och räknade ut volymen mer exakt skulle vi sällan få exakt samma volym som formeln visar. Däremot räcker den uppskattning vi får fram ofta för våra behov. För att t.ex. planera en avverkning måste vi inte i förväg ha reda på alla träds volym på kubikdecimetern när, det räcker kanske att få volymen för beståndet avrundat till närmaste hundratal kubikmeter.

När skogsforskarna skapar matematiska modeller måste de ta hänsyn till hur de ska användas i praktiken. Modellen som kommenterades ovan kanske skulle bli bättre om man utöver diametern i brösthöjd lyckades mäta en diameter högre upp på trädet. Då skulle man kunna fånga upp trädets form bättre. Problemet är att då tar mätningarna i fält längre tid. Denna ökade kostnad kan sällan motiveras, eftersom resultatet bara försumbart blir bättre än vad det blivit om man nöjt sig med att bara ta diametern i brösthöjd. Handlar det däremot om grundforskning så kan en sådan här extra mätning mycket väl vara motiverad. Det gäller alltså hela tiden att rationellt bedöma hur mycket tid och pengar man är villig att betala för att få ett bättre resultat.

PRIORITET

När vi ska använda en skriven matematisk formel finns det en viss praxis för hur den ska tolkas. Praxisen gäller räknesättens *prioritet*; dvs. i vilken ordning beräkningarna ska utföras.

EXEMPEL 1

I ett bestånd finns ett samband mellan trädens brösthöjdsdiameter i cm (x) och deras höjd i meter (y). I ett visst bestånd gäller:

$$y = 9 + 0{,}4\ x$$

Vad kommer ett träd med diameter 10 cm att ha för höjd enligt formeln?

* * *

Eftersom diametern var 10 kan vi byta ut x mot 10 i formeln:

$$y = 9 + 0{,}4\ 10$$

Vad menas då med detta? Jo, mellan 0,4 och x i formeln finns inget tecken, men i matematiken underförstås då att det finns ett gångertecken mellan dessa. Vi har alltså:

$$y = 9 + 0{,}4 \cdot 10$$

Nästa fråga är vad vi ska göra först när vi räknar ut detta; ska vi plussa ihop 9 och 0,4 eller utföra multiplikationen $0{,}4 \cdot 10$? Enligt de regler som finns så ska multiplikationen tas före additionen; gånger går alltså före plus. Vi får:

$$y = 9 + 0{,}4 \cdot 10$$
$$y = 9 + 4$$
$$y = 13$$

Ett träd med brösthöjdsdiameter (brh-diameter) 10 cm har alltså en höjd på 13 meter.

❑

Du kanske är van vid att man får samma enhet på det värde som kommer *ut* ur formeln som det värde man stoppar *in*, men så är det sällan i skogen. I exempel 1 stoppade vi in diametern i cm och fick ändå resultatet i meter. Detta beror på att modellen är gjord så att det ska vara så enkelt att arbeta med den i skogen som möjligt. Eftersom man oftast brukar mäta diametern i cm och höjden i meter så fungerar också formeln så att den använder dessa enheter direkt. Hade vi fått höjden i cm hade vi ju varit tvungna att omvandla till meter, vilket ger ett extra och onödigt steg.

De valigaste fyra räknesätten är:

ADDITION:	$90 + 30 = 120$ Term Term Summa
SUBTRAKTION:	$90 - 30 = 60$ Term Term Differens
MULTIPLIKATION:	$90 \cdot 30 = 2\,700$ Faktor Faktor Produkt
DIVISION:	$90 / 30 = 3$ Täljare Nämnare Kvot

I de matematiska modeller vi kommer att arbeta med i kursen kommer vi dessutom ofta att använda upphöjt till:

UPPHÖJT:	$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ Bas Exponent

Som vi såg i exempel 1 förekommer ibland flera olika räknesätt i en och samma formel. För att undvika förvirring om vad man då menar har man bestämt att de ska tillämpas i följande ordning:

1. Parenteser
2. Upphöjt till

3. Multiplikation och division
4. Addition och subtraktion

Denna ordning fungerar ungefär som trafikregler. På samma sätt som vi vet att en bil från höger har förkörsrätt, så ska vi veta att gånger går före plus i matematiken.

Här kommer nu ett antal exempel. Läs igenom dem och se att du förstår varför resultaten blir som de blir.

EXEMPEL 2

$2 + 8 \cdot 4 = 2 + 32 = 34$

❑

EXEMPEL 3

$(2 + 8) \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40$

Parenteser ska alltid beräknas först.

❑

EXEMPEL 4

$3 \cdot 8 - 18 / 2 + 4$

Detta tal består av tre termer: ”$3 \cdot 8$”, ”$18 / 2$” och ”4”. Var och en av dessa måste beräknas för sig innan vi lägger ihop de tre delarna. ”$3 \cdot 8 = 24$”, ”$18 / 2 = 9$” och ”4” som redan var klar. Stoppar vi in dessa uträkningar i det ursprungliga uttrycket får vi:

$24 - 9 + 4 = 15 + 4 = 19$

Observera att när ”$24 - 9 + 4$” ska beräknas kan vi om vi vill först lägga ihop de positiva termerna och sedan dra ifrån de negativa:

$24 - 9 + 4 = 24 + 4 - 9 = 28 - 9 = 19$

❑

EXEMPEL 5

$3 \cdot 8 - 18 / (2 + 4)$

Jämför detta med exempel 4. Det enda som tillkommit är en parentes. I det här exemplet finns det nu *två* olika termer: ”$3 \cdot 8$” och ”$18 / (2 + 4)$”. Var och en av dessa ska räknas ut för sig: ”$3 \cdot 8 = 24$” och ”$18 / (2 + 4) = 18 / 6 = 3$”. Sätter vi ihop detta får vi:

$24 - 3 = 21$

❑

EXEMPEL 6

$(2 + 8)^4 + 80 \cdot 10$

Det finns två termer: ” $(2 + 8)^4$ ” och ”$80 \cdot 10$”. I den första termen börjar vi med parentesen:” $(2 + 8)^4 = 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$”. I den andra får vi 800. Sammansatt blir detta:

$10\,000 + 800 = 10\,800$

❑

EXEMPEL 7

$(12 + 8)(5 - 2) - 3(8 + 2) + 2^{3+1}$

Här har vi tre termer. Kan du urskilja dem? De olika termerna avgränsas av tecken med låg prioritet, dvs. med + och –.

Första termen: $(12 + 8)(5 - 2) = 20 \cdot 3 = 60$

Andra termen: $3(8 + 2) = 3 \cdot 10 = 30$

Tredje termen: $2^{3+1} = ?$

Här borde ju 2^3 beräknas först och därefter ettan lagts till, men eftersom ”3+1” står med små tecken underförstås en parentes runt 3 + 1. Vi får alltså:

Tredje termen: $2^{3+1} = 2^{(3+1)} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Sammantaget:

$60 - 30 + 16 = 30 + 16 = 46$

❑

EXEMPEL 8

$$\frac{10 - 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 + 10}$$

Vi har egentligen bara en enda term här. Det långa bråkstrecket innebär underförstått också en osynlig parentes runt det som står ovanför och en annan parentes runt det som står under bråkstrecket:

$$\frac{(10 - 2 \cdot 3)}{(6 \cdot 5 + 10)}$$

Täljaren = (10 – 2 · 3) = 10 – 6 = 4

Nämnaren = (6 · 5 + 10) = 30 + 10 = 40

Sammantaget får vi:

$$\frac{10 - 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 + 10} = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

❑

EXEMPEL 9

4 / 2 · 3

Det här talet brukar ofta missförstås. Ska vi tolka det som (4 / 2) · 3 eller som 4 / (2 · 3)? Resultaten blir helt olika i dessa två fall. Praxis är att det är den första tolkningen här som gäller. Vi ska alltså först utföra divisionen och sedan multiplikationen. Om man vill ha den andra tolkningen måste man alltså lägga till en extra parentes runt ”2 · 3”. Så här ska det alltså tolkas:

4 / 2 · 3 = 2 · 3 = 6

❑

Idag ska ofta formlerna man använder i skogen matas in i en dator. Då kan man normalt inte mata in formlerna med ett horisontellt bråkstreck av den typ vi hade i exempel 8 ovan. I datorn måste man mata in hela formeln på en och samma rad och får då använda tecknet / för divisionen. När man översätter formler skrivna med långa horisontella bråkstreck till formler skrivna med divisionstecknet / kan det vara en bra regel att sätta en parentes runt hela uttrycket i täljaren och ytterligare en parentes runt hela uttrycket i nämnaren.

EXEMPEL 10

$\dfrac{2 \cdot 3 + 2}{2 \cdot 2}$ kan översättas med följande formel skriven på en rad:

(2 · 3 + 2) / (2 · 2)

❑

ÖVNINGAR

☞ Beräkna utan miniräknare

101 **a)** $5 \cdot 8 + 3$ **b)** $5(8 + 3)$

c) $5 / 5 + 5$ **d)** $5 / (5 + 5)$

102 **a)** $(12 - 2) \cdot 3$ **b)** $12 - 2 \cdot 3$

c) $12 - (2 \cdot 3)$ **d)** $2 + 12 \cdot 3 - 18 / 2$

103 **a)** $(18 - 5) / (2 \cdot 6 + 1)$ **b)** $12 / 2 - 4 \cdot 2 + 13$

c) $8 \cdot 5 \cdot 4 - 3$ **d)** $8 \cdot 5(4 - 2)$

104 **a)** $9 + 5 \cdot 2 + 30 / 2$ **b)** $(8 + 2) \cdot 3 - (19 - 9)$

c) $3(8 - 3) - 2(2 \cdot 3 - 5)$ **d)** $\dfrac{7 \cdot 2^2}{6 \cdot 5 - 2}$

105 **a)** $4(7 \cdot 2^3 - 6)$ **b)** $5 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0$

c) $\dfrac{8 - 4}{2} + 2 \cdot 3$ **d)** $\dfrac{20 / 4 + 1}{18 - 4 \cdot 4}$

106 **a)** $17 - 3 \cdot 10 / 2 + 4(3 - 1) - (10 - 4 \cdot 2)$

b) $8 \cdot 9 - 100 / (25 + 5^2) - 70 / 2 + 3$

☞ Skriv nedanstående former på en enda rad. **Ersätt alltså de horisontella bråkstrecken med / och parenteser**. Beräkna även **värdet**.

107 **a)** $\dfrac{8}{2 \cdot 4}$ **b)** $\dfrac{6 \cdot 6}{6 + 6}$

c) $\dfrac{4 + 4 \cdot 3}{5 + 3}$ **d)** $\dfrac{2 + 4 \cdot 3}{5 + 3 \cdot 3}$

108 **a)** $\dfrac{2 + 2(23 - 2)}{4 - 2}$ **b)** $\dfrac{9^2 - 1}{2(23 - 2) - 2}$

c) $\dfrac{8}{2 \cdot 4} + 3 \cdot \dfrac{9 + 3}{9 - 3}$ **d)** $\dfrac{2(8 - 4) + 3 \cdot 9}{5 + 6 \cdot 5}$

109 **a)** $\dfrac{17 - 8}{2 \cdot 6 - 3}$ **b)** $\dfrac{\frac{10}{2} \cdot \frac{8}{4}}{\frac{4}{2}}$

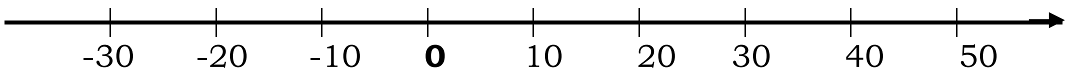
c) $\dfrac{8 + 9 - \frac{8 \cdot 8}{2 \cdot 16}}{3}$ **d)** $\dfrac{2 \cdot 4 + \frac{27}{4 - 1} - \frac{32}{4 \cdot 4}}{9 - \frac{18}{3}}$

110 **a)** $\dfrac{\frac{52 \cdot 3}{4} - 36}{10 \cdot 14 - 6 \cdot 6 \cdot 3 + 1}$ **b)** $\dfrac{\frac{8}{3 \cdot 5 - 10}}{\frac{4}{7}}$

NEGATIVA TAL

Innan vi återvänder till skogsformlerna ska vi först ta upp lite om negativa tal. Att räkna med negativa tal är förhållandevis nytt inom matematiken. Metoder och formler för att beräkna sträckor, areor och volymer har man hållit på med sedan 500-talet f.Kr. medan de negativa talen först började användas 2 000 år senare, på 1500-talet e.Kr.

Alla tal som vi ska använda oss av i den här kursen (de reella talen) får plats på tallinjen.



Tallinjen består av oändligt många punkter och varje punkt motsvarar ett tal. De tal som ligger till vänster om noll är de negativa talen. Mot varje positivt tal till höger om noll svarar precis ett negativt tal på lika långt avstånd från noll fast på vänster sida.

I praktisk matematik finns det en hel del exempel på negativa tal, bland annat brukar man inom ekonomiämnet betrakta skulder som negativa tal. Ett annat konkret exempel på negativa tal har vi vid temperaturbestämning med Celsiusskalan. En gammaldags termometer är ju i sig en vertikalt ställd tallinje.

Om en person som har en skuld på 25 000 kr vinner 100 000 kr så kan han betala tillbaka sin skuld och ha kvar 75 000 kr. Matematiskt skulle vi kunna skriva detta:

$$-25\,000 + 100\,000 = +\,75\,000$$

Om han däremot har en skuld på 25 000 och till detta ska lägga ytterligare en annan skuld på 100 000 kr blir det:

$$-25\,000 + (-100\,000) = -25\,000 - 100\,000 = -125\,000$$

När vi lägger till en skuld (adderar något negativt) blir resultatet negativt. Följande räkneregler gäller:

$10 + (-5) = 10 - 5 = 5$

$10 - (+5) = 10 - 5 = 5$

$10 - (-5) = 10 + 5 = 15$

$10 + (+5) = 10 + 5 = 15$

De flesta av dessa regler är naturliga. I tredje fallet ” 10 – (-5)” skulle vi kunna motivera resultatet med att vi tar bort något negativt. Att ta bort en skuld på fem enheter är ju något positivt.

Motsvarande regler gäller också vid multiplikation och division.

$(+10) \cdot (+5) = +50$	$(+10)\ /\ (+5) = +2$
$(-10) \cdot (-5) = +50$	$(-10)\ /\ (-5) = +2$
$(-10) \cdot (+5) = -\ 50$	$(-10)\ /\ (+5) = -2$
$(+10) \cdot (-5) = -\ 50$	$(+10)\ /\ (-5) = -2$

Samma tecken ger alltså positiva och olika tecken negativa resultat.

EXEMPEL 11

$-9 - (-7) + 20\ /(-4) = -9 + 7 - 5 = -2 - 5 = -7.$

Talet innehåller tre termer ”-9” som är klar, ”- (-7) = + 7” och ”20 / (-4) = -5”. Sammantaget fås:

$-9 + 7 - 5 = -7$

❑

EXEMPEL 12

Om ett föremål kastas eller skjuts rakt upp i luften med farten 50 m/s, så har den efter x sekunder farten y m/s, där sambandet ges av formeln:

$y = 50 - 10x$

Vad har den för fart efter: a) 2,5 s? b) 5,0 s? c) 7,5 s?

* * *

a) $x = 2{,}5$ ger $y = 50 - 10 \cdot 2{,}5 = 50 - 25 = 25$ m/s

b) $x = 5{,}0$ ger $y = 50 - 10 \cdot 5{,}0 = 50 - 50 = 0$ m/s

c) $x = 7{,}5$ ger $y = 50 - 10 \cdot 7{,}5 = 50 - 75 = -25$ m/s

Den negativa hastigheten här innebär att föremålet nu bytt riktning och är på väg tillbaka ner mot marken igen.

❑

ÖVNINGAR

☞ Beräkna utan miniräknare

111 **a)** $5 - (-8)$ **b)** $5 + (-8)$

c) $-5 - (-8)$ **d)** $-5 + (-8)$

112 **a)** $5 \cdot (-8)$ **b)** $-5 / -2$

c) $-5(-8)$ **d)** $5 / -2$

113 **a)** $-12 /(5 - 8)$ **b)** $-(6 - (-2)) / 4$

c) $-(8 - 5) / (2 \cdot 3)$ **d)** $(-2)(-3)(-4) + 5$

114 **a)** $(-3)(-2)/(-(6 + 6))$ **b)** $-1 - 2 - 3 - 4 \cdot (-2)$

c) $2 \cdot (-17) + 10 \cdot 2 \cdot 2$ **d)** $5 - (-2)(-3)(-4)$

115 a) $-9 - (-7)$ **b)** $(9 - (-7)) / (-4)$

c) $(8 + 2) \cdot 3 - (19 - 9)$ **d)** $3(8 - 3) - 2(2 \cdot 3 - 5)$

116 **a)** $20 - (-3)(-3)(-8)$ **b)** $2(5 \cdot 7 + 20 - 40 /8) - 82$

117 **a)** $-10 - \dfrac{-12}{6} + (-8) \cdot \dfrac{2}{4}$

b) $5(8 - 3) + (2 - 4)(-3) + (11 - 7) / (2 \cdot 2) + 3$

118 a) (-2)(+3)(-4) – (-1)(+2)(-3)

b) 5(2 – 9) – 7(-4) – (-9) + 5(-2)(-1) – (+12)

119 a) -8 – (5 – 3) – 9(2 – 4) + (-5)(-6)

b) (5(2 – 8) – 7(-4) – (-8)) /(5 · (-2)(-1) – (+12))

OLIKA SÄTT ATT UTTRYCKA SAMMA FORMEL

De regler vi tittat på nu, framför allt metoden med att identifiera olika termer, gör att vi nu kan uttrycka en och samma formel på olika vis. Antag att vi har uttrycket:

$$-3 + 4 \cdot 5$$

Vi vet att detta består av två termer ”-3” och ”4 · 5”. Vi kan då kasta om ordningen på dem *under förutsättning att vi tar med det tecken som föregår dem.* Termen ”4 · 5” är positiv eftersom den har ett plus framför sig. Genom att byta plats på termerna får vi:

$$+4 \cdot 5 - 3$$

Plustecknet allra först brukar dock inte skrivas ut. Istället skriver man:

$$4 \cdot 5 - 3$$

Observera att alla dessa tre varianter av att skriva uttrycket hela tiden ger samma resultat: 17. Hade det inte blivit samma resultat hade det varit något fel.

På motsvarande vis som ovan kan den formel vi arbetade med tidigare (exempel 1 på sidan 3) också uttryckas på olika sätt. Från början hade vi:

$$y = 9 + 0{,}4\ x$$

där det är ett osynligt gångertecken mellan 0,4 och x. Till höger om likamedtecknet har vi alltså två termer ”+9” och ”+0,4 · x”. Byter vi plats på dessa får vi:

$$y = +\ 0{,}4\ x + 9 \qquad \text{dvs.}$$

$$y = 0{,}4\ x + 9$$

Stoppar man in $x = 10$ i denna sista formel får man att $y = 13$, precis som vi fick i exempel 1 tidigare. De två formlerna ”$y = 9 + 0{,}4\,x$” och ” $y = 0{,}4\,x + 9$” är alltså två olika sätt att säga samma sak. De ger exakt samma resultat, oavsett vad vi stoppar in för värde på x.

Övningar

120. Följande formel kan användas som höjdkurva i ett visst bestånd. Här betecknar x brh-diametern i cm och y höjden i meter.

$$y = 3 + 1{,}1\,x - 0{,}02\,x^2$$

a) Bestäm utan miniräknare höjden för ett träd med 10 cm diameter.

b) Formeln har tre termer på höger sida. Vilka är de?

c) Kasta om ordningen på termerna så att formeln fortfarande ger samma resultat. Skriv formeln på minst två andra sätt. När du stoppar in $x = 10$ i den modifierade formeln ska svaret fortfarande bli som i uppgift a).

d) Komplettera följande värdetabell.

x = Diameter, cm:	10	15	20	25
y = Höjd, m:				

121. Nedanstående formel kan användas för att uppskatta hur många kalorier per minut (y) en man med ålder x år förbränner vid motion.

$$y = -0{,}8\,x^2 - 20\,x + 14\,000$$

a) Bestäm hur många kalorier en 10-åring förbränner per minut.

b) Bestäm hur många kalorier en 40-åring förbränner per minut.

122. I följande formel anger y elförbrukningen (enhet: kWh/dygn) för ett hus vid en viss given utomhustemperatur i grader Celsius (x).

$$y = 0{,}3x^2 - 6x + 65$$

a) Bestäm förbrukningen vid: + 10 °C

b) Bestäm förbrukningen vid: – 10 °C

BRÅKRÄKNING

Du har säkert räknat med bråk förut i skolan. Kanske kan det kännas konstigt att behöva göra detta i en tid när det finns miniräknare och datorer. Anledningen att vi som hastigast måste ta upp det här, är att detta grundlägger en förståelse för de formler vi ska arbeta med senare under kursen.

De tal som historiskt utvecklades först var de positiva heltalen: 1, 2, 3, …Så småningom uppstod behov av att också kunna uttrycka delar av heltal, vilket gjorde att man började använda sig av bråktal. Ett bråktal är helt enkelt en division mellan två heltal.

Ett och samma bråk kan uttryckas på många olika sätt. Decimaltalet 0,5 motsvaras t.ex. av bråken 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, … , 50/100… Om *en* bulle ska delas av *två* personer får ju varje person lika mycket som om fyra personer ska dela på två bullar eller 100 personer ska dela på 50 bullar. De får i samtliga fall en halv (0,5) bulle var.

De tal på tallinjen som kan uttryckas som kvoten mellan två heltal (dvs. bråktal) brukar kallas för *rationella* tal, efter grekiskans ratio som betyder förnuft. Talen är förnuftiga i den meningen att man kan förstå var på tallinjen de finns. Länge trodde man att alla tal var rationella; talet 2,3456 är ju rationellt eftersom det kan uttryckas som kvoten mellan två heltal t.ex. 23 456 och 10 000. Gjorde man bara indelningen tillräckligt fin trodde man att man skulle hitta alla tal på tallinjen – men icke! Senare visade det sig att det finns tal på tallinjen *mellan* de rationella talen. Dessa tal kom att kallas irrationella. Inte nog med det man har på senare tid visat att det finns oändligt många gånger fler irrationella än rationella tal på tallinjen…

Irrationella tal har en oändligt lång decimalutveckling som aldrig upprepar sig. Ett sådant exempel som du säkert stött på är π (pi). Decimalutvecklingen börjar: 3,14159265… och forskarna har tagit fram ett antal miljoner decimaler ytterligare, men man kommer aldrig att kunna fastställa decimalutvecklingen för π exakt.

Det vi behöver kunna för att klara formelhanteringen bra är reglerna för att addera, subtrahera, multiplicera och dividera bråk. Detta har du säkert sett förut, men här kommer en repetition.

EXEMPEL 13

Addition och subtraktion av bråktal.

a) $\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4+2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{9}-\frac{1}{12}=?$

Här måste vi först förvandla till samma nämnare. Eftersom både 9 och 12 går jämnt upp i 36 ($4\cdot 9 = 36$ och $3\cdot 12 = 36$) så förvandlar vi båda bråken till 36-delar.

$$\frac{2}{9}-\frac{1}{12}=\frac{4\cdot 2}{4\cdot 9}-\frac{3\cdot 1}{3\cdot 12}=\frac{8}{36}-\frac{3}{36}=\frac{5}{36}$$

❑

EXEMPEL 14

Multiplikation med bråktal.

a) $3\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$

Observera att 3:an vi multiplicerar med hamnar ovanför bråkstrecket, inte under!

b) $\frac{7}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{7\cdot 5}{4\cdot 7}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$

❑

EXEMPEL 15

Division med bråktal. Vid division med bråktal används begreppet ”inverterade tal”. Ett inverterat tal är helt enkelt det bråktal man får när man byter plats på täljare och nämnare i det ursprungliga bråket.

Inverterat tal till $\frac{2}{3}$ är $\frac{3}{2}$

Inverterat tal till $5 = \frac{5}{1}$ är $\frac{1}{5}$

Inverterat tal till $\frac{1}{3}$ är $\frac{3}{1} = 3$

Vid division mellan två bråktal kan man beräkna kvoten genom att multiplicera talet i täljaren med det inverterade talet i nämnaren.

a) $$\frac{\frac{4}{5}}{3} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{1}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$$

b) $$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

❑

ÖVNINGAR

☞ Är beräkningarna riktigt gjorda i nedanstående fall? Svara *ja* eller *nej*.

123 **a)** $\frac{3 \cdot 64}{16} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 16}{16} = \frac{3 \cdot 4}{1} = \frac{12}{1} = 12$

b) $\frac{3 + 16}{4} = \frac{3 + 4 \cdot 4}{4} = 3 + 4 = 7$

c) $\frac{27}{3 + 3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3 + 3} = 3$

d) $\frac{27}{3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5} = 9 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = 9 + \frac{3}{10} = 9{,}3$

☞ Beräkna utan miniräknare och svara i bråkform på så enkelt sätt som möjligt.

124 **a)** $6 \cdot \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{6} \cdot 3$

c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ **d)** $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

125 **a)** $\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3}$ **b)** $\dfrac{\frac{1}{6}}{3}$

c) $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}$ **d)** $\frac{1}{8} + \frac{2}{3}$

126 **a)** $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ **b)** $\frac{5}{3} - 2 \cdot \frac{3}{5}$

c) $\dfrac{3 - \frac{2}{3}}{7}$ **d)** $\dfrac{1 - \frac{4}{7}}{\frac{1}{2}}$

Dimensionsräkning

I det här avsnittet demonstreras hur man kan ha nytta av bråkräkning när man arbetar med formler för att se vad slutresultatet kommer att få för enhet. Denna teknik, som är mycket användbar i praktiken, brukar kallas för dimensionsräkning. Först kommer ett exempel där tekniken egentligen är onödig, men som illustrerar själva idén.

EXEMPEL 16

Om det går 60 minuter på en timme, hur många minuter går det då på åtta timmar?

* * *

Beräkning: $8 \cdot 60 = 480$

Vad får vi svaret i för enhet? Vi vet att 8:an har enheten h (dvs. timmar) och 60 har enheten min/h. Eftersom räknesättet är multiplikation får vi:

Enhet: $\mathrm{h} \cdot \dfrac{\mathrm{min}}{\mathrm{h}} = \dfrac{\mathrm{h} \cdot \mathrm{min}}{\mathrm{h}} = \dfrac{\mathrm{min}}{1} = \mathrm{min}$

Svar: 480 min

❑

EXEMPEL 17

En person springer 3 km på 10 minuter. Vad har hon för hastighet uttryckt i m/s och km/h?

* * *

Vi ser på enheten för hastighet att vi ska dividera sträckan med tiden. Beräknar vi 3 / 10 = 0,3 får vi t.ex. enheten km/min, eller hur? För att få enheten m/s förvandlar vi först 3 km till 3 000 m och 10 minuter till 600 sekunder.

Hastighet 1: $\dfrac{3000\ \mathrm{m}}{600\ \mathrm{s}} = 5\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ dvs. 5 m/s

För att få hastigheten i km/h måste vi uttrycka 10 min som timmar. Vi vet att det går 60 min/h varför personen gått: $\dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6}\mathrm{h}$.

Hastighet 2: $\dfrac{3\ \mathrm{km}}{\frac{1}{6}\mathrm{h}} = \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{6}{1} = \dfrac{18}{1} = 18$ km/h

❑

EXEMPEL 18

En skogsmaskin avverkar 300 stammar på fyra timmar. Vilken är dess prestation uttryckt i stam/min?

* * *

Beräkning: $$\frac{300}{4 \cdot 60} = \frac{300}{240} = \frac{30}{24} = \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Enhet: $$\frac{\text{stam}}{\text{h} \cdot \frac{\text{min}}{\text{h}}} = \frac{\text{stam}}{\frac{\text{h} \cdot \text{min}}{\text{h}}} = \frac{\text{stam}}{\text{min}}$$

Svar: Maskinen producerar 1,25 stam/min.

❑

EXEMPEL 19

En skogsmaskin avverkar 300 stammar på fyra timmar. Hur många sekunder tar varje stam?

* * *

För att få antalet sekunder tar vi: 4 h · 60 min/h · 60 s/min.

Beräkning: $$\frac{4 \cdot 60 \cdot 60}{300} = \frac{4 \cdot 60}{5} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 5}{5} = \frac{4 \cdot 12}{1} = 48$$

Enhet: $$\frac{\text{h} \cdot \frac{\text{min}}{\text{h}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{min}}}{\text{stam}} = \frac{\text{h} \cdot \frac{\text{s}}{\text{h}}}{\text{stam}} = \frac{\text{s}}{\text{stam}}$$

Svar: Maskinen använder alltså i snitt 48 sekunder per stam.

❑

ÖVNINGAR

127. Om v har enheten km/h, s har enheten km och t har enheten h, vilken enhet kommer då följande formler att få:

a) $\frac{v}{s}$ **b)** $v \cdot t$ **c)** $\frac{s}{v}$ **d)** $\frac{1}{v}$

128. Låt A = 5 ha, V = 2500 m^3, T = 4 h/ha och beräkna med hjälp av detta värdet för följande formler. Ange också enheten för svaret med hjälp av dimensionsräkning.

a) $\frac{V}{A}$ **b)** $A \cdot T$ **c)** $\frac{1}{T}$

129. Beräkna enheten för följande former. Antag att L har enheten m, V enheten m/s, T enheten s och R ha/s

a) $L \cdot L$ **b)** $\frac{L}{V}$ **c)** $V \cdot T$

d) $\frac{V}{L}$ **e)** $\frac{1}{R}$ **f)** $R \cdot T$

130. En viss skotare i gallring med energiskogsuttag skotar A = 2,5 ton/lass och klarar P = ett lass i timmen. Energiinnehållet är E = 2,0 MWh/ton och skotaren kostar K = 800 kr i timmen. Bestäm, och ange ***enheten*** för, följande.

a) $P \cdot A$ **b)** $P \cdot A \cdot E$ **c)** $\frac{K}{P}$ **d)** $1 / K$

131. En skotare rör sig med hastigheten 50 m/min. Vad får du för tal om du inverterar 50? Vad får du för enhet? Vad är det alltså som du räknat ut? Förvandla det inverterade talet till en mer passande enhet.

PROCENTRÄKNING

Många tror att procenträkning är någonting lätt, och det kanske det egentligen är. Problemet med procent är att det hela tiden är fråga om *förhållanden* mellan tal, *relationer* och *andelar*. När man talar om procent måste man därför hela tiden göra klart vad det är procent av. Missar man detta kan en lämnad faktauppgift mycket väl missförstås. Ordet procent kommer från latinets *pro centum* vilket betyder ”per hundra”. Om vi t.ex. vet att två personer i en grupp på 50 personer har en viss egenskap, så räknar vi om detta till hur många det skulle bli i en grupp på 100 personer. Enligt reglerna för bråkräkning får vi:

$$\frac{2}{50} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 50} = \frac{4}{100} = 0{,}04 = 4\%$$

Vi säger då att det är 4 % i gruppen som har egenskapen. Om gruppen istället bestått av 100 personer hade det varit 4 som burit på egenskapen om andelen skulle vara densamma som i gruppen med 50.

Ibland behöver man gå den andra vägen. Om det är 4 % i en grupp som har en egenskap, hur många blir det då i en grupp på 200 personer?

$$4\ \%\ \text{av}\ 200 = \frac{4}{100} \cdot 200 = \frac{4 \cdot 200}{100} = \frac{800}{100} = 8$$

4 procent är alltså för gruppen med 200 personer detsamma som 8 av dessa personer.

När man räknar med procent kan det vara bra att kunna övergången mellan bråktal, decimaltal och procent. Om en person är ensam i en grupp och bär på en egenskap bär ju 1/1 = 1 = 100% i gruppen på egenskapen. På motsvarande vis; om en person i en grupp av tre personer bär på egenskapen är detta 1/3 ≈ 0,33 = 33 % osv. Se tabell 1.2 nedan. Att utantill kunna dessa övergångar mellan bråk och heltal har man ofta nytta av – åtminstone vid tentan på detta avsnitt ;-)

TABELL 1.2. Övergång mellan bråktal, decimaltal och procent.

Bråk	Decimaltal	Procent
1/1	= 1,000	100,0 %
1/2	= 0,500	50,0 %
1/3	≈ 0,333	33,3 %
1/4	= 0,250	25,0 %
1/5	= 0,200	20,0 %
1/6	≈ 0,170	16,7 %
1/7	= 0,143	14,3 %
1/8	= 0,125	12,5 %
1/9	= 0,111	11,1 %
1/10	= 0,100	10,0 %

EXEMPEL 20

På provyta A är det 4 av 14 träd som är lövträd. Hur många procent motsvarar det?

* * *

Lövandelen i beståndet är:

$$\frac{4}{14} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

Men tabell 1.2 ovan säger att 1/7 motsvarar 14,3 procent och då måste 2/7 vara dubbelt så mycket, dvs. ungefär 28,6 procent.

❑

EXEMPEL 21

En gran i ett bestånd är 20 meter hög och en tall i närheten är 25 meter.

a) Hur mycket *kortare* är granen än tallen?

b) Hur mycket *längre* är tallen än granen?

* * *

Problemet med procent är att de två uppgifterna ovan kommer att ge *olika* svar trots att relationen gäller *samma* träd. Det hänger på vilket av de två träden vi utgår från i jämförelsen. I a) är det tallen som är utgångspunkten och det som vi ska jämföra granen med, och i b) är det på motsvarande vis granen som är måttstocken.

a) $$\frac{\text{Höjdskillnad}}{\text{Tallens höjd}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%$$

Granen är alltså 20 % kortare än tallen.

b) $$\frac{\text{Höjdskillnad}}{\text{Granens höjd}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

Tallen är alltså 25 % längre än granen.

❑

En annan variant att räkna procent, som vi kommer använda mycket senare i kursen, är att använda sig av *förändringsfaktorn.* Denna brukar ofta användas när man räknar på förändringar över tiden. Antag t.ex. att ett bestånd innehåller 1 000 m^3 skog vid ett mättillfälle. Antag vidare att detta ökat till 1 030 m3 ett antal år senare. Med hur många procent har då virkesförrådet ökat?

$$\text{Förändringsfaktorn} = \frac{\text{Nytt värde}}{\text{Ursrpungligt värde}} = \frac{1030}{1000} = 1{,}03$$

Att förändringsfaktorn är 1,03 innebär att det nya virkesförrådet är 103 % av det gamla, dvs. att ökningen är 3 %. Det är viktig att du känner dig säker på båda dessa metoder för att beräkna procent.

EXEMPEL 22

Priset på massaved antas vara 200 kr/m^3fub. Vad händer med detta pris om det…

a) *ökar* med 20 %?

b) *minskar* med 10 %?

* * *

a) 20 % ökning innebär att förändringsfaktorn = 1,20.
Nytt pris: $1{,}20 \cdot 200 = 240$ kr/ m^3fub

b) 10 % minskning innebär att förändringsfaktorn = 0,90.
Nytt pris: $0{,}90 \cdot 200 = 180$ kr/ m^3fub

❑

EXEMPEL 23

Priset på massaved antas vara 200 kr/m^3fub. Vad händer med priset om det först höjs med 10 % och därefter sänks med 10 % av det nya priset?

* * *

10 % ökning innebär att förändringsfaktorn = 1,10.
Nytt pris: $1{,}10 \cdot 200 = 220$ kr/m^3fub.

10 % minskning innebär att förändringsfaktorn är 0,90.
Nytt pris: $0{,}90 \cdot 220 = 198$ kr/m^3fub.

Observera att höjningen och sänkningen inte tar ut varandra. Totalt hamnar vi 2 kr under det ursprungliga priset på 200. Anledningen är att vi vid sänkningen tar 10 % på 220 och detta är mer än vid ökningen då vi tog 10 % på 200.

Observera också att vi direkt kunde ha fått fram svaret genom att beräkna (men då behöver vi nog räknare):

$1{,}10 \cdot 0{,}90 \cdot 200 = 198$

Vid flera procentuella höjningar och sänkningar efter varandra kan man alltså successivt multiplicera ändringsfaktorerna med varandra. I det här fallet blir $1{,}10 \cdot 0{,}90 = 0{,}99$ vilket alltså innebär 1 % sänkning av priset sett sammantaget över tidsperioden.

❑

EXEMPEL 24

En varas pris höjs med 25 % till 12 500 kr. Vad kostade den före höjningen?

* * *

Antag att det okända priset *före* höjning är *x* kr. Vi vet vidare att förändringsfaktorn är 1,25. Vi får då ekvationen:

$$x \cdot 1{,}25 = 12500$$

$$x = \frac{12500}{1{,}25}$$

$$x = 10000$$

❑

En sista kommentar här om procent. Det är viktigt att skilja på å ena sidan *procent* och å andra sidan *procentenheter*. Om t.ex. ett politiskt parti i en opinionsundersökning har ett väljarstöd som ökat från 5 % till 10 % så är ökningen inte 5 % utan 100 %. Partiet har ju fördubblat sina sympatisörer, alltså en ökning med 100 %. Däremot säger man att partiet har ökat med 5 procentenheter.

ÖVNINGAR

☞ Beräkna utan miniräknare

132 a) 10 % av 400 **b)** 20 % av 800

c) 110 % av 400 **d)** 80 % av 1 000

133. Vad blir förändringsfaktorn vid…

a) …25 % minskning? **b)** …50 % ökning?

c) …200 % ökning? **d)** …4 % minskning?

134. Virkesförrådet per hektar höjs under en tidsperiod i ett bestånd med 50 m^3 till 200 m^3.

a) Vad blir förändringsfaktorn? **b)** Hur stor är den procentuella ökningen?

135. På en utbildning finns 30 män och 20 kvinnor. Hur många procent är kvinnor?

136. Hur stor är förändringsfaktorn om priset för en vara

a) …ökar från 12 till 15 kr?

b) … minskar från 15 kr till 12 kr?

c) Med hur många procent ökar respektive minskar alltså priset med i uppgifterna a) och b)?

137. En person har under ett år en bruttolön på 300 000 kr och betalar 40 % i skatt. Vilket tal ska vi multiplicera 300 000 med för att få…

a) …hans nettolön?

b) …det han betalar i skatt

c) Hur stor blir hans nettolön och skatt?

138. Två bestånd, A och B, ligger bredvid varandra. Bestånd A har arealen 4 ha och bestånd B arealen 16 ha.

a) Hur många procent *mindre* är A än B?

b) Hur många procent *större* är B än A?

c) Om man slår ihop bestånden, hur många procent av den sammanlagda arealen utgörs då av arealen som från början hörde till bestånd A?

139. Ett år minskas antalet anställda vid en industri med 50 % och året efter ökar antalet anställda med 10 % från den bantade nivån. Med hur många procent har antalet anställda sjunkit totalt?

140. Under en arbetsdag med motormanuellt gallringsarbete producerar Huggman 300 massavedsbitar. Huggman producerar därmed 50 % fler bitar än Fällkvist. Låt x beteckna antalet bitar Fällkvist producerar. Ställ upp en ekvation i stil med den i exempel 24 ovan. Lös ekvationen. Hur många bitar producerar Fällkvist?

141. Det statliga stödet för skogsvård ökar från ett år till ett annat med 10 % till 220 miljoner kronor. Låt x beteckna stödet *före* höjning. Ställ upp en ekvation i stil med den i exempel 24 ovan. Lös ekvationen. Hur stort var stödet före ökningen?