SKOGLIGA TILLÄMPNINGAR

I detta avsnitt ska vi titta på några av de skogliga tillämpningar på geometri som finns.

SKOGSKARTAN – EN MODELL AV VERKLIGHETEN

Arbetar man i skogen klarar man sig knappast utan karta. Idag kan en skogvaktare/distriktsansvarig ansvara för 100 000 ha. Jämför detta med hur det såg ut för 30 år sedan då ansvarsområdet var i storleksordningen 10 000 ha och skogvaktaren kunde hålla hela området i huvudet. För att hjälpa den moderna skogsmannen finns som tur är olika geografiska informationssystem på datorn (GIS).

En bra karta ger snabbt mycket information. För att den ska kunna fungera som ett bra planeringsunderlag måste den dock visa rätt. I dagsläget är de flesta kartor på de stora skogsföretagen digitaliserade och inlästa i datorer. Detta är dock långt ifrån någon garanti för att de är riktiga. Digitaliseringen har ofta skett på ackord och många beståndsgränser är direkt felaktiga. Det kanske kommer att bli ett framtida arbete för dig att sitta och rätta till alla felaktiga linjer…

En karta har alltid en skala. Skalan beskriver egentligen relationen mellan bilden och verkligheten.

Skala = Bild:Verklighet

Om skalan t.ex. anges till 1:50 000 så betyder det att 1 cm på kartan (bilden) motsvarar 50 000 cm = 500 m i verkligheten. Kolonet (:) som anges mellan *Bild* och *Verklighet* är egentligen en gammal matematisk symbol för division. Skalan 1:50 000 skulle alltså också kunna uttryckas:

$$\frac{1}{50\,000} = \textit{räkneregeler för bråk} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 50\,000} = \frac{2}{100\,000}$$

Skalan beskriver som sagt en relation mellan bild och verklighet. På samma sätt som 1 cm på kartan motsvarar 50 000 cm i verkligheten motsvarar 2 cm 100 000 cm i verkligheten. Relationen är ju densamma.

I praktiken behöver man kunna följande tre saker för att kunna hantera matematiken i kartor och ritningar.

① Utifrån en given sträcka i verkligheten och motsvarande sträcka på bilden/kartan kunna beräkna *skalan.*

② För en given skala kunna beräkna *sträckan i verkligheten* när man känner sträckan på bilden/kartan.

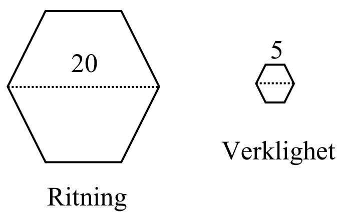
③ För en given skala kunna beräkna *sträckan på kartan* om man känner sträckan i verkligheten.

När man talar om kartor handlar det om att bilden är en *förminskning* av verkligheten. Talet *efter* kolonet kommer då att vara störst. I ritningssammanhang kan man mycket väl tänka sig tvärt om; att skissen är en *förstoring* av verkligheten. Då kommer talet före kolonet att vara störst. T.ex. betyder skalan 10:1 att 10 enheter i bilden motsvarar 1 enhet i verkligheten.

För att beräkna skalan dividerar man en given sträcka i bilden med motsvarande sträcka i verkligheten. Observera att de två sträckorna ska uttryckas i samma enhet.

EXEMPEL 1

Bestäm skalan för nedanstående ritning. Det streckade avståndet är 2 cm på ritningen och 5 mm på den verkliga detaljen.



* * *

$\text{Bild} \leftrightarrow \text{Verklighet}$

$2\text{ cm} \leftrightarrow 5\text{mm}$ ← Samma enhet på båda sidorna

$20\text{ mm} \leftrightarrow 5\text{mm}$ ← Dividera med 5 på båda sidorna

$$\frac{20\text{ mm}}{5} \leftrightarrow \frac{5\text{mm}}{5}$$

$4\text{ mm} \leftrightarrow 1\text{mm}$

1 mm i verkligheten motsvara alltså 4 mm i bilden (/ritningen). Observera att vi lika gärna t.ex. då kan säga att 1 dm i verkligheten motsvarar 4 dm på bilden. Skalan är utan enhet och visar bara en relation.

Svar: Skalan är 4:1.

❑

EXEMPEL 2

Avståndet mellan två orter är 69,2 cm på en karta med skalan 1:100 000. Hur långt är avståndet i verkligheten?

* * *

$\text{Bild} \leftrightarrow \text{Verklighet}$

$1\text{ cm} \leftrightarrow 100\ 000\text{cm}$

$1\text{ cm} \leftrightarrow 1000\text{ m}$

$1\text{cm} \leftrightarrow 1\text{km}$

$69{,}2\text{cm} \leftrightarrow 69{,}2 \cdot 1\text{km}$

$69{,}2\text{cm} \leftrightarrow 69{,}2\text{ km}$

Svar: Det är ca 69 km mellan orterna.

❑

EXEMPEL 3

En spikrak stickväg som är 180 meter lång ska avbildas på en karta i skalan 1:1 000. Hur lång blir vägen på kartan?

* * *

Bild $\leftrightarrow$ Verklighet

$1\text{ cm} \leftrightarrow 1\,000\text{ cm}$

$1\text{ cm} \leftrightarrow 10\text{m}$ ← Dividera med 10 på båda sidorna

$0{,}1\text{cm} \leftrightarrow 1\text{m}$ ← Multiplicera med 180 på båda sidorna

$180 \cdot 0{,}1\text{cm} \leftrightarrow 180\text{ m}$

$18\text{ cm} \leftrightarrow 180\text{ m}$

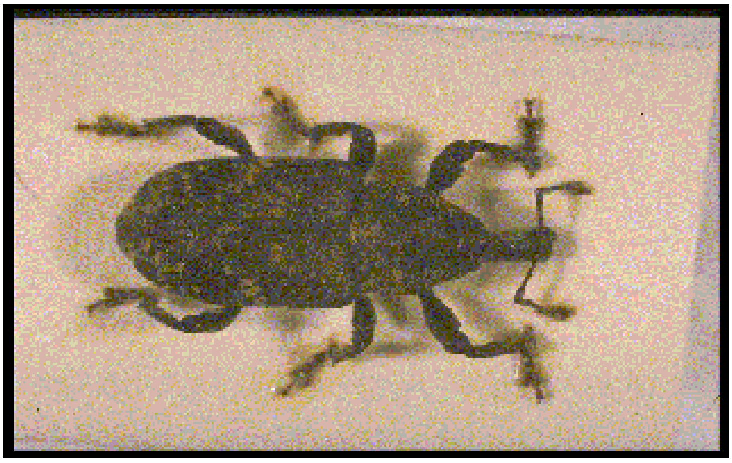
Svar: Stickvägen blir 18 cm lång på kartan.

❑

ÖVNINGAR

301. Mellan två platser är det 8 cm på en karta i skalan 1: 50 000. Hur långt är det i verkligheten?

302. En snytbagge som i verkligheten är 12 mm lång har förstorats på en bild så att den är 6 cm. Vilken skala har bilden?



303. Ett hygge i form av en rektangel är avbildat i skala 1:500. På kartan är rektangelns sidor 15 och 20 cm långa. Hur stort är hyggets areal uttryckt i ha?

304. Vilken är skalan?

a) 12 meter i verkligheten motsvarar 4 cm på bilden.

b) 6 cm på bilden motsvarar 12 km i verkligheten.

c) 8 mm i verkligheten motsvarar 20 cm på bilden.

305. En karta är ritad i skalan 1 : 20 000. Ett skogsskifte på kartan är format som en rektangel med basen 15,0 mm och höjden 10 mm. Beräkna skiftets areal i hektar.

TRÄDSTAMMENS VOLYM

Stammen på ett träd ser ju varken ut som en cylinder eller som en kon. Eftersom stammen smalnar av kommer inte tvärsnitten att få samma area hela tiden. Avsmalningen är större än för cylindern, men inte fullt så stor som för konen. Som en tumregel och grov uppskattning kan man därför på rotstående träd uppskatta trädets volym som grundytan (genomskärningsytan i brösthöjd) multiplicerat med höjden och dividera detta med 2. Allmänt uttryckt: ”grundytan gånger halva höjden”.

Trädets volym blir alltså därmed hälften så stor som vad en cylinder med samma diameter skulle ha, men större än motsvarande kon som ju utgör en tredjedel av cylinderns volym. Den diameter vi i skogen brukar använda på rotstående skog är dessutom den som finns i brösthöjd, 1,3 meter ovan jord.

Kvoten mellan stammens volym och motsvarande cylinders volym (alltså en cylinder med samma diameter och höjd som trädet) brukar kallas för *formtal*. I olika bestånd och för olika trädslag har man i regel olika formtal. Formtalet är sortlöst, dvs. det har ingen enhet.

Stammens volym = Formtalet · grundytan · höjden

Om vi räknar med den grova uppskattningen ovan blir formtalet 0,5. Alltså:

Stammens volym ≈ 0,5 · grundytan · höjden

Ibland brukar man för ett enskilt träd också tala om formhöjden. Detta är helt enkelt formtalet multiplicerat med höjden. Vi skulle alltså även kunna skriva formeln:

Stammens volym = formhöjden · grundytan

BESTÅNDETS VOLYM

På motsvarande vis som för det enskilda trädet kan man uppskatta volymen per areaenhet i ett helt bestånd genom att ta:

Beståndets volym ≈ 0,5 · medelgrundyta · medelhöjd

Medelgrundytan i m^2/ha mäter man då på rotstående skog oftast in med relaskop och medelhöjden i meter med hjälp av höjdmätare. Med dimensionsräkning ser vi att beståndets volym därmed kommer att få enheten:

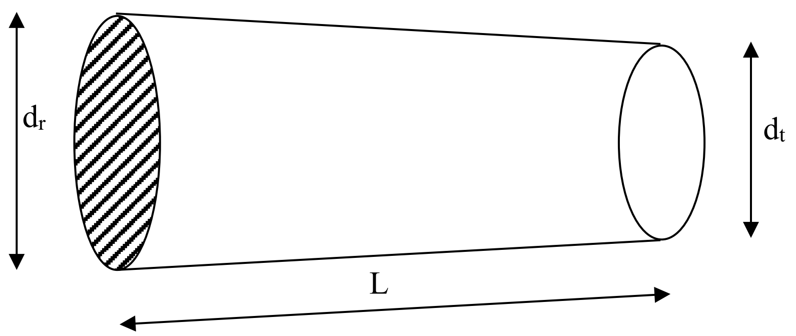
$$\frac{m^2}{ha} \cdot m = \frac{m^2 \cdot m}{ha} = \frac{m^3}{ha}$$

Genom att sedan multiplicera detta värde med arealen för beståndet får vi en uppskattning av det totala virkesförrådet i beståndet.

TRÄDSTOCKENS VOLYM

I skogen används en massa olika enheter för att representera olika typer av volymer. Man pratar om volymer på och under bark, travad volym, toppmätt volym osv. Mer om detta senare i kursen. I det här avsnittet ska vi titta på två formler för att uppskatta en trädstocks volym. Vi börjar med den enklaste varianten.

Antag att vi har en stock där vi bestämt diametern i såväl topp- som rotände (betecknas d_t respektive d_r i figuren nedan). För att få stockens volym kan man då först beräkna den genomsnittliga ytan i topp och rot och därefter multiplicera denna genomsnittliga yta med längden. Med beteckningar enligt figuren nedan får vi:



$V = L \cdot (\pi \cdot d_r^2/4 + \pi \cdot d_t^2/4) \ / \ 2$ (Smalians formel)

Om alla sträckor mäts i dm fås resultatet i enheten dm^3.

Den andra formeln är egentligen mer matematiskt korrekt, men svårare att förstå intuitivt. Enligt denna gäller (G_r = grundytan i rot- och G_t = grundytan i topp):

$$V = L \cdot (G_r + G_t + \sqrt{G_r \cdot G_t}) / 3 \qquad \text{(Stympad kon)}$$

Formeln kommer från formeln för en kon. Om stocken hade fortsatt att smalna av i samma takt som den gör nu och man sedan tar bort den övre delen som ligger utanför stocken så utgör ju denna topp en ny kon. Genom att ta skillnaden mellan de två konernas volym får man efter förenkling ovanstående formel.

Om man önskar bestämma volymen av ett fällt träd väldigt exakt kan man dela upp stammen i ett antal sektioner och använda den senare formeln för att få varje sektions volym. Genom att slutligen addera sektionernas volym får man hela stammens volym.

ÖVNINGAR

306. Uppskatta stammens volym för ett träd med diameter 20 cm och höjd 18 meter. Använd $\pi \approx 3$. Svara i m^3 avrundat till två decimaler.

307. Ett träd har diametern 40 cm, höjden 25 meter och formtalet 0,60. Uppskatta dess volym i m^3 med en decimal. Använd $\pi \approx 3$.

308. En trädstam kapas på ett ställe med en 2 mm tjock sågklinga. Hur många cm^3 sågspån bildas om diametern är 40 cm vid kapstället? Använd $\pi \approx 3$.

309. En stock har genomskärningsytan 150 cm^2 i topp- och 200 cm^2 i rotänden. Längden är 4 m. Använd Smalians formel för att beräkna dess volym i m^3.

310. I ett bestånd är grundytan i genomsnitt 30 m^2/ha. Uppskatta det totala virkesförrådet om medelhöjden är 18 meter och beståndets areal är 4 ha.

311. Ett träd med diameter 20 cm och höjd 15 meter håller volymen 250 dm^3. Vad har trädet för formtal ungefär? Använd att $\pi \approx 3$ och tabell .

312. En kort stock har samma diameter i rot och topp och längden 30 dm. Diametern på bark är 33 cm och enkla barktjockleken är 15 mm och barken antas vara lika tjock överallt på stocken. Uppskatta volymen *under* bark. Använd att $\pi \approx 3$. Svara i hela dm^3.

313. På en 50 m^2 stor provyta står fyra träd med en sammantagen volym på 1,25 m^3sk. Bestäm vilken volym och stamantal detta motsv. per hektar.

314. På en cirkulär provyta med arean 100 m^2 står sex träd. Två av träden har diameter 10 cm och fyra har diameter 30 cm.

a) Uppskatta hur många stammar detta motsvarar per hektar.

b) Beräkna den *sammanlagda* virkesvolymen av de sex träden på provytan. Använd $\pi \approx 3$, formtalet 0,5 och följande höjdkurva för att uppskatta trädens höjder (där x är diametern i cm och y höjden i meter):

$$y = 2 + 1{,}2x - 0{,}02\,x^2$$

c) Uppskatta hur många m^3 svaret på uppgift b) motsvarar per hektar