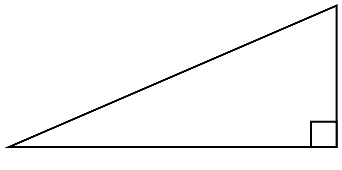
TRIGONOMETRI

I det här avsnittet kommer vi att studera hur man beräknar vinklar och sträckor för givna figurer. Ordet trigonometri innebär läran om förhållandet mellan vinklar och sträckor i trianglar.

LIKFORMIG AVBILDNING

Centralt för trigonometrin är begreppet *likformig avbildning*. Alla kartor och ritningar är, som vi varit inne på tidigare, exempel på likformiga avbildningar. Med detta menas att relationen hela tiden är densamma om man tar en sträcka i bilden och dividerar med motsvarande sträcka i verkligheten (eller tvärt om). Vidare innebär det att alla *vinklar* som sidorna bildar i bilden och i verkligheten är desamma. Om vi har en triangel och antingen förstorar eller förminskar den så kommer detta inte att påverka vinklarnas storlek – de blir desamma.

På samma sätt som en sträcka kan uttryckas i olika enheter (cm, mm, tum etc) så kan en vinkel också uttryckas på lite olika sätt. Det vanligaste sättet är att man utgår från att ett varv är precis 360°. Ett kvarts varv, en så kallad rät vinkel, är då 360 / 4 = 90°. På ritningar brukar en rät vinkel markeras med en liten fyrkant (se figur 5.1 med fyrkanten nere till höger i bild).



Figur 5.1. En triangel där nedre högra hörnet har en rät vinkel (90°).

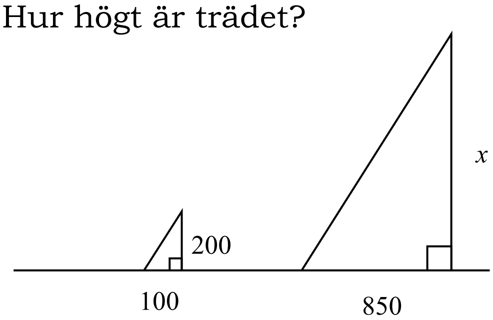
Om man definierar ett varv som 360° så gäller att summan av vinklarna i en fyrhörning alltid är just 360°. Summan av vinklarna i en triangel är då alltid 180°. I vissa sammanhang (t.ex. på kompassen) definierar man dock ett varv som 400 grader - eller gon - och då blir en rät vinkel 400 / 4 = 100 gon.

EXEMPEL 1

Vid ett visst ögonblick en solig dag bildar ett träd en skugga som är 8,5 meter lång. Samtidigt får en person som har en längd av 200 cm en skugga som är precis 100 cm. Hur högt är trädet?

* * *

Här har vi ett exempel på likformig avbildning. Vinklarna i de två trianglarna kommer att bli lika stora. Vidare kommer relationerna mellan sidorna att bli desamma.



Följande ekvation kan därmed ställas upp (sidan *x* i den stora triangeln ska förhålla sig till 200 i den lilla på samma sätt som sidan 850 förhåller sig till 100):

$$\frac{x}{200} = \frac{850}{100}$$

$$x = 200 \cdot \frac{850}{100}$$

$$x = 2 \cdot 850$$

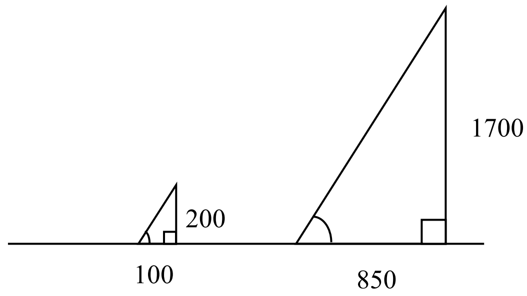
$$x = 1700$$

<u>Svar</u>: Trädet är 17,0 m högt.

❑

BESTÄMNING AV *STRÄCKA* MED TANGENS

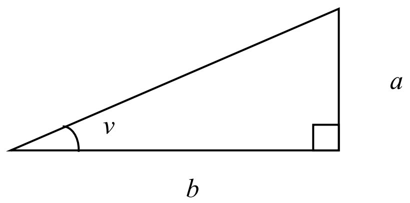
När vi löste exempel 1 ovan fick vi följande figur (figur 5.2). Vi vet att de två trianglarna är likformiga och därför har samma storlek på sina vinklar. T.ex. kommer vinkeln längst ned till vänster i trianglarna att vara lika stor. Det är lätt att inse att denna vinkels storlek helt och hållet bestäms av relationen mellan de två kateterna i triangeln (kateterna är de två sidor som tillsammans bildar en rät vinkel).



Figur 5.2. Två trianglar som har lika stor vinkel i nedre vänstra hörnet eftersom relationen mellan kateterna för dem är densamma (850/100 = 8,5 och 1700/200 = 8,5).

Beräknar vi relationen i den vänstra triangeln får vi:
200 / 100 = 2,0 och på motsvarande vis i den högra:
1700 / 850 = 2,0. Det är just detta samband som utnyttjas i funktionen TAN (tangens). I alla rätvinkliga trianglar gäller att:

$$TAN(v) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Motstående katet}}{\text{Närliggande katet}}$$



Figur 5.3. Definitionen av tangens för en vinkel i en rätvinklig (90°) triangel. Sidan *a* står mitt emot vinkeln *v* och sidan *b* är mer närliggande *v*.

I praktiken innebär detta att om man känner längden på en sida i triangeln och kan mäta upp hur stor vinkeln är, så kan längden på de övriga sidorna i triangeln beräknas. Höjdmätaren som används i skogsbruket utnyttjar detta och är egentligen inget annat än en vinkelmätare. Känner vi i figur 5.3 ovan vinkeln *v* och avståndet till trädet, sträckan *b*, kan trädets höjd, *a,* bestämmas.

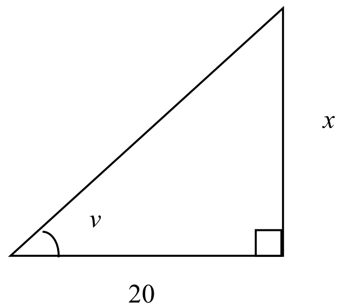
Först måste man dock bestämma vilken typ av grader som man ska använda. Vi väljer här den vanliga typen som innebär 360° för ett helt varv och 90° för en rät vinkel. Tabell 5.1 på följande sida kan därefter användas.

Tabell 5.1 Tangens för vinklar mellan 0 och 89 grader. Ett varv definieras då som 360 grader och en rät vinkel som 90 grader.

v	*tan(v)*	*v*	*tan(v)*	*v*	*tan(v)*
0	0,000	30	0,577	60	1,732
1	0,017	31	0,601	61	1,804
2	0,035	32	0,625	62	1,881
3	0,052	33	0,649	63	1,963
4	0,070	34	0,675	64	2,050
5	0,087	35	0,700	65	2,145
6	0,105	36	0,727	66	2,246
7	0,123	37	0,754	67	2,356
8	0,141	38	0,781	68	2,475
9	0,158	39	0,810	69	2,605
10	0,176	40	0,839	70	2,747
11	0,194	41	0,869	71	2,904
12	0,213	42	0,900	72	3,078
13	0,231	43	0,933	73	3,271
14	0,249	44	0,966	74	3,487
15	0,268	45	1,000	75	3,732
16	0,287	46	1,036	76	4,011
17	0,306	47	1,072	77	4,331
18	0,325	48	1,111	78	4,705
19	0,344	49	1,150	79	5,145
20	0,364	50	1,192	80	5,671
21	0,384	51	1,235	81	6,314
22	0,404	52	1,280	82	7,115
23	0,424	53	1,327	83	8,144
24	0,445	54	1,376	84	9,514
25	0,466	55	1,428	85	11,430
26	0,488	56	1,483	86	14,301
27	0,510	57	1,540	87	19,081
28	0,532	58	1,600	88	28,636
29	0,554	59	1,664	89	57,290

EXEMPEL 2

När man står 20 meter från ett träd så uppmäts vinkeln v i figuren nedan till 51 °. Vilken höjd har trädet?



* * *

I figuren till höger är x *motstående* katet till vinkeln v medan sidan som är 20 meter lång är *närliggande* katet (den närliggande kateten är den sida som både bildar rät vinkel med en annan sida i triangeln och som dessutom spänner upp vinkeln v).

Med hjälp av formeln ovan får vi ekvationen:

$$TAN(51°) = \frac{x}{20}$$

Observera att *TAN*(51) är ett tal som vi kan utläsa av tabell 5.1 ovan. I tabellen är talet avrundat till tre decimaler: 1,235 men det finns egentligen många fler decimaler här.

$$1{,}235 = \frac{x}{20}$$

För att få x fritt på höger sida måste vi multiplicera upp 20. Vi får:

$$20 \cdot 1{,}235 = x$$

och med huvudräkning kan vi exempelvis räkna 2 · 12,35 = 24,7 m

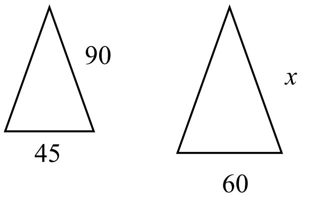
<u>Svar</u>: Trädet är 24,7 m högt.

❑

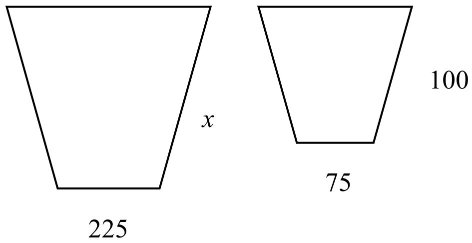
ÖVNINGAR

501. Nedanstående figurer visar likformiga avbildningar. Bestäm längden på sidan markerad med *x*.

a)



b)

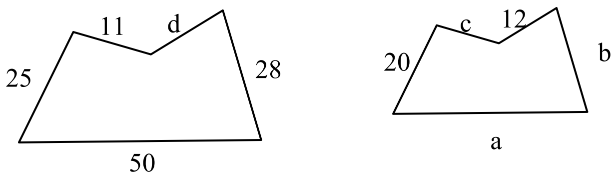


502. Bestäm med hjälp av tabell 5.1.

a) TAN(12°) **b)** 200 · TAN(52°)

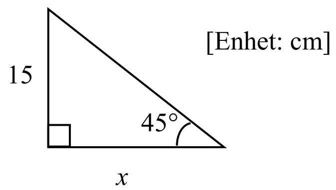
c) 10 · TAN(38°) **d)** 57 · TAN(45°) / 3

503. Figuren nedan visar två likformiga femhörningar. Hur långa är sidorna a, b, c och d? Avrunda svaren till heltal.

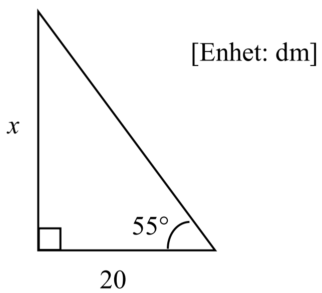


☞ *Ställ först upp en ekvation med x för följande trianglar. Bestäm sedan längden på sidan markerad med x med hjälp av tabell 5.1. Bestäm därefter också triangelns area.*

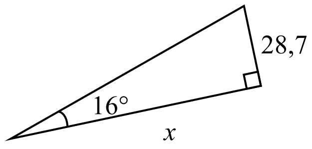
504.



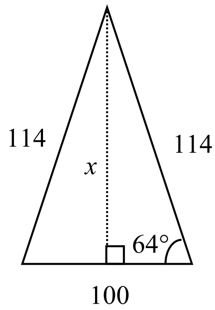
505.



506. [Enhet: cm]



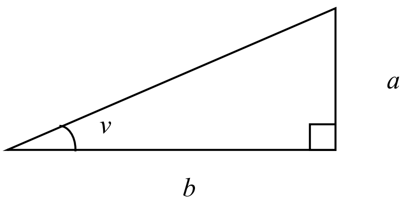
507. [Enhet: m]



BESTÄMNING AV *VINKEL* MED TANGENS

På motsvarande vis som man kan beräkna en okänd sida i triangeln när vinkeln är känd så kan man beräkna vinkeln när sidorna är kända. Observera dock att triangeln måste vara rätvinklig för att det ska fungera. Är den inte det får vi försöka använda tekniken som tillämpades i uppgift 507 ovan där den ursprungliga triangeln inte var rätvinklig men kunde delas upp i två rätvinkliga genom att höjden i den ursprungliga triangeln drogs.

$$TAN(v) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Motstående katet}}{\text{Närliggande katet}}$$



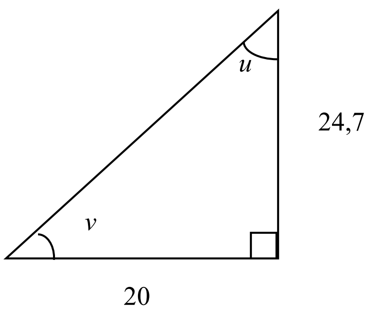
Figur 5.4. Definitionen av tangens för en vinkel i en rätvinklig triangel.

EXEMPEL 3

Hur stora är vinklarna v och u i nedanstående figur?

* * *

Med hjälp av formeln ovan får vi ekvationen (varför?):



$$TAN(v) = \frac{24,7}{20}$$

TAN för något okänt ska alltså bli 24,7 / 20 = (24,7 / 2) / 10 = 12,35 / 10 = 1,235

Vi går in ”baklänges i tabell 5.1 och ser att vinkeln då måste vara 51°.

Eftersom summan av vinklarna i en triangel alltid är 180° så får vi vinkeln *u* = 180° – 90° – 51° = 39°.

<u>Svar</u>: Vinkeln *v* = 51° och vinkeln *u* = 39°.

❑

I exemplet ovan använder vi den inversa funktionen till tangens för att få fram vinkeln: TAN^{-1}. Blanda inte ihop denna med TAN. TAN^{-1} är ”baklängesfunktionen” till TAN. TAN använder vi när vi känner vinkeln och vill ha ut sidan medan TAN^{-1} används när vi känner sidorna och vill ha ut vinkeln.

EXEMPEL 4

Bestäm vinklarna *v* och *u* i nedanstående figur.

* * *

Med hjälp av tangens och tabell 5.1 kan vi beräkna vinkeln *v*.

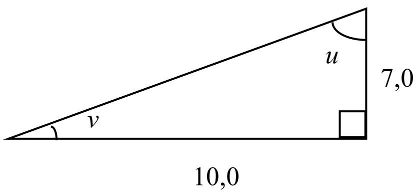
$$TAN(v) = \frac{7,0}{10,0}$$

$$TAN(v) = 0,70$$

$$v = TAN^{-1}(0,70)$$

$$v \approx 35°$$

Gå in ”baklänges” i tabell 5.1 på 0,70 för att få motsv. vinkel 35°.



Eftersom summan av vinklarna i en triangel alltid är 180° så får vi vinkeln *u* = 180° – 90° – 35° ≈ 55°.

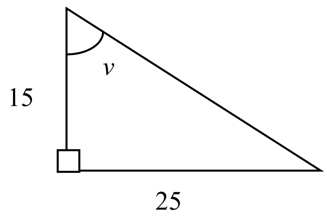
<u>Svar</u>: Vinkeln *v* = 35° och vinkeln *u* = 55°.

❑

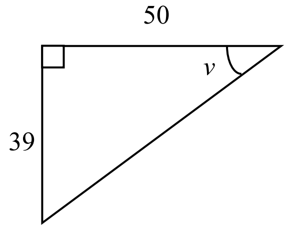
Övningar

☞ *Ställ upp en ekvation och uppskatta därefter med hjälp av tabell 5.1 storleken på vinkeln v i följande figurer.*

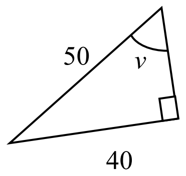
508.



509.

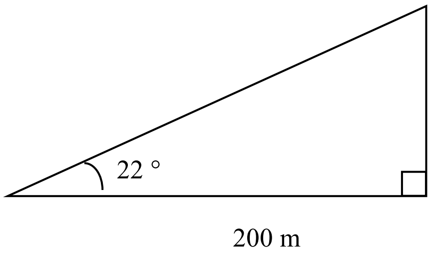


510.

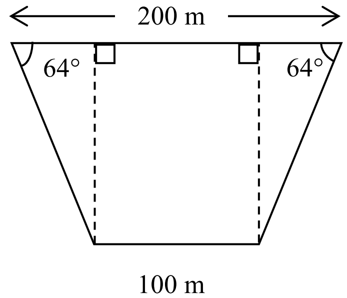


☞ *Bestäm arean i hektar med två decimaler för följande figurer.*

511.

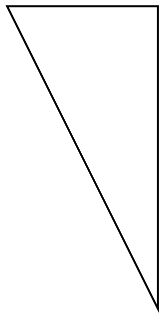


512.



513. Nedanstående bild är en skiss på ett skogsskifte format som en rätvinklig triangel. Bilden är i skalan 1:20 000.

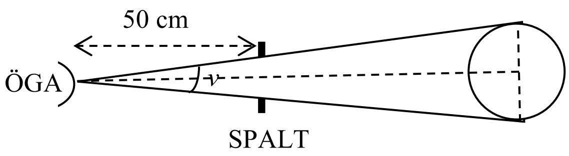
a) Använd linjal för att bestämma skiftets areal i hektar. Beräkna sedan hur många ekplantor som ska beställas om området ska planteras med 1 000 ek-plantor per hektar? (Vid planteringen blandas sedan ekplantorna med rader av gran.)



b) Bestäm m.h.a. tabell 5.1 vinkeln i den nedre spetsen på triangeln.

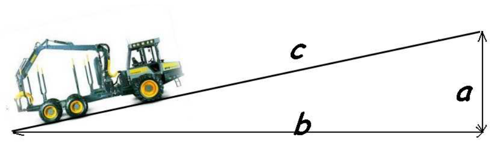
514. Ett relaskop har en spaltöppning på 10 mm och en kedjelängd som gör att spalten vid användning hamnar 50 cm från ögat.

Uppskatta med hjälp av tabell 5.1 hur stor vinkeln *v* är (figuren nedan är *inte* skalenlig).



LUTNINGSPROCENT

I vissa tekniska tillämpningar i skogsbruket brukar man använda begreppet lutningsprocent som mått på en vinkel. Det kan t.ex. handla om en maskin ska orka upp för en backe (se figur 5.5).



$$\text{Lutningsprocenten} = \frac{\text{Motstående katet}}{\text{Närliggande katet}} = \frac{a}{b}$$

Figur 5.5. Definitionen av lutningsprocent för en backe.

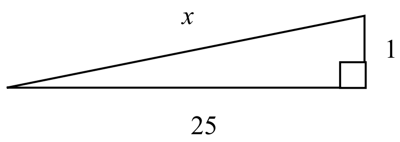
Observera att detta innebär att lutningsprocenten är detsamma som tangens för backens vinkel. I praktiken kan det ofta vara svårt att mäta sträckan *b* i figuren. Istället kan man då mäta sträckan *c*. Sträckorna *b* och *c* kommer nämligen att vara ungefär lika långa om vinkeln är liten, vilket den oftast är i praktiken.

Notera också att i en triangel där *a* och *b* är lika stora så kommer lutningsprocenten att bli 100 %.

EXEMPEL 5

Bestäm lutningsprocenten och sträckan x i nedanstående figur.

* * *



Lutningen = 1 / 25 = 0,04 = 4 %

Med hjälp av Pythagoras sats får vi den okända sidan x:

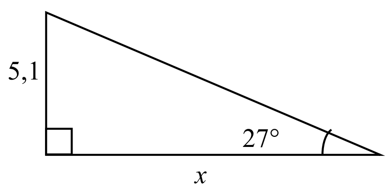
$$25^2 + 1^2 = x^2$$
$$x^2 = 25^2 + 1^2$$
$$x = \sqrt{25^2 + 1^2}$$
$$x \approx 25{,}02$$

Här blir alltså hypotenusan nästan precis lika lång som den långa kateten. Vi hade alltså fått svaret 4 % på lutningen även om vi använt hypotenusan istället för kateten.

❑

ÖVNINGAR

515. Bestäm lutningsprocenten och sidan x i följande figur (figuren är inte skalenlig).



516. Ett tåg kör uppför en 1 km lång backe. Lutningsprocenten är 8%.

a) Uppskatta hur många meter högre upp tåget befinner sig vid backens slut.

b) Uppskatta med hjälp av tabell 5.1 hur många grader backens lutningsvinkel är. Svara på en halv grad när.